

# BASES DE LA RDM

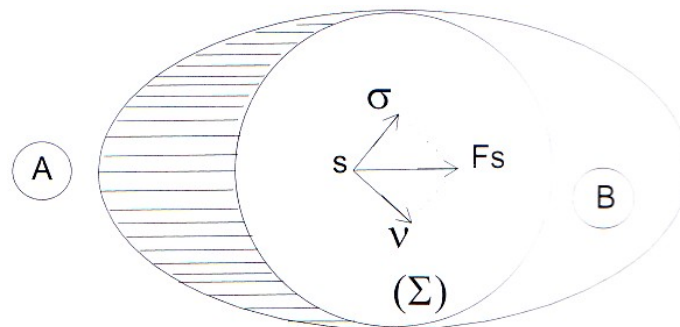
**Généralités :** la résistance des matériaux est la théorie des poutres, c'est à dire qu'elle s'occupe du dimensionnement des solides dont une dimension est grande par rapport aux deux autres (celles de la « section »). Cette science a pour but de dimensionner correctement les ouvrages, et pour cela s'intéresse à ce qui se passe dans celui-ci ; on a donc deux branches principales :

- Equilibre extérieur du solide : domaine de la statique
- Equilibre intérieur du solide : domaine de la résistance des matériaux

Pour permettre un dimensionnement correct on applique :

- des coefficients de sécurité sur les résistances des matériaux, *ou bien :*
- des coefficients de pondérations sur les charges qui sont appliquées à ceux-ci
- des limitations aux déformations pour éviter des désordres dans des éléments secondaires ou bien seulement pour des raisons esthétiques.

**Vecteur contrainte :** supposons le solide coupé en 2 parties A et B par une surface  $\Sigma$ , B est en équilibre sous l'effet des forces extérieures qui lui sont appliquées et des forces élastiques exercées par A sur B ; nous admettons l'hypothèse que sur chaque élément de surface  $s$  de  $\Sigma$ , A exerce sur B une force élastique  $\vec{f}_s$  appliquée au centre de l'élément  $s$  ; par définition  $\vec{f}_s$  est appelé vecteur contrainte (force/surface en Pa, Mpa, bar).

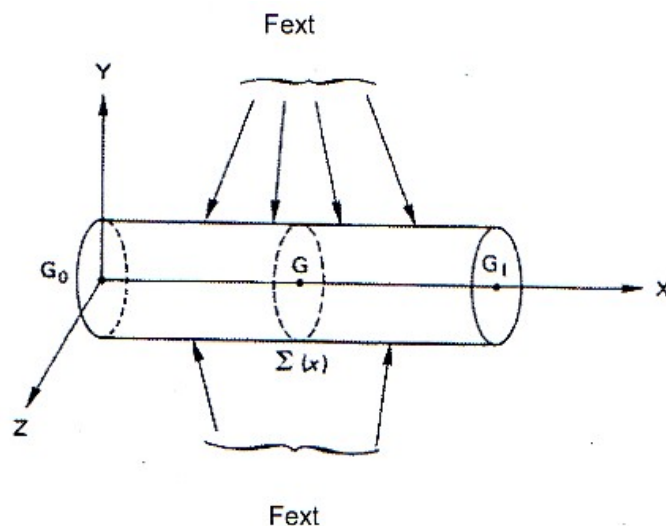


$\vec{f}_s$  peut être décomposé en :

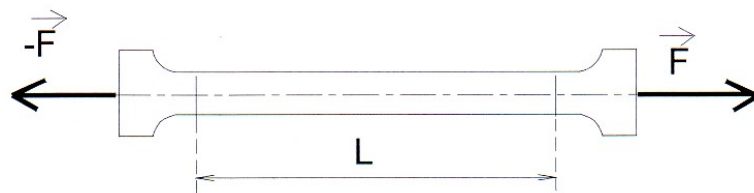
- une contrainte normale  $\vec{\sigma}$  ; en cas de compression B est poussée vers A (par convention  $>0$ ), en cas de traction B est tirée de A (par convention  $<0$ )
- une contrainte tangentielle  $\vec{\tau}$

l'ensemble des forces  $\vec{f}_s$  appliqué à la surface  $\Sigma$  par A sur B forme un système équivalent au système des forces extérieures directement appliquées sur la partie A ; il existe une multitude de ces systèmes équivalents et on doit poser d'autres hypothèses que celle de la statique pour déterminer lequel est le bon.

Systeme d'axes utilisé :



**Essai de traction :** sur une éprouvette d'acier doux on exerce une force de traction  $\vec{F}$  :



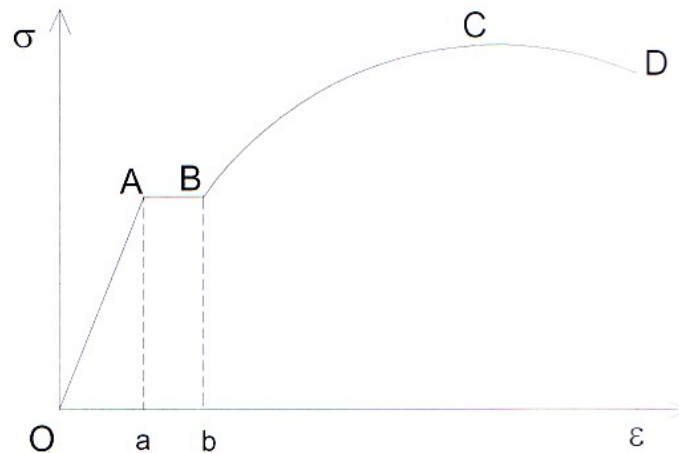
la répartition des contraintes au milieu de l'éprouvette étant considérée comme uniforme on définit le vecteur contrainte :

$$\vec{\sigma} = \frac{\vec{F}}{S}$$

ainsi que l'allongement relatif (nombre sans dimensions) :

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

résultats de l'essai de traction :



OA est la partie élastique réversible, d'où l'on en tire la loi de Hooke, avec E module d'élasticité ou de Young :

$$\epsilon = \frac{-\sigma}{E}$$

le signe – vient de la convention : traction négative, compression positive

cet allongement s'accompagne corrélativement d'un rétrécissement de la section :

$$\frac{\Delta \Phi}{\Phi} = -\nu \frac{\Delta L}{L} = -\nu \epsilon$$

on définit aussi un module d'élasticité longitudinal G, utilisé dans les calculs de contraintes au cisaillement :

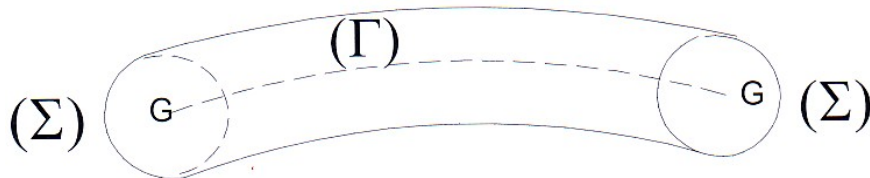
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

AB est le domaine plastique, dans lequel la barre s'allonge sans que l'effort n'augmente sensiblement de valeur ; c'est le domaine de l'adaptation plastique, les zones les moins fatiguées viennent au secours des zones les plus sollicitées.

C est la limite de rupture où apparaît le phénomène de striction : sur une aire sensiblement centrale la section diminue rapidement jusqu'à la rupture. La partie descendante est d'ailleurs un artifice : si le calcul était réalisé sur la section réelle et non sur la section de départ de l'éprouvette la courbe ne serait que croissante.

---

**Conditions de la méthode :** on ne considère ici que les poutres à plans moyens, i.e. admettant un plan de symétrie dans le sens de leur longueur. Il s'agit d'un solide engendré par une aire plane  $\Sigma$  (section droite) dont le centre de gravité  $G$  décrit une courbe plane  $\Gamma$  (fibre moyenne), le plan de l'aire  $\Sigma$  restant normal à la courbe  $\Gamma$ . Si la fibre moyenne est droite la poutre est dite droite.



- 1- Poutres droites : les dimensions transversales de la poutre doivent être petites par rapport à leur longueur :  $1/5 < \frac{\text{hauteur}_{\text{section}}}{\text{longueur}_{\text{poutre}}} < 1/15$  en valeur courante, jusqu'à 1/30 en valeurs extrême (sans toutefois être trop faible pour éviter que la poutre ne soit trop déformable).
- 2- poutres courbes : pour les poutres courbes ce rapport peut être réduit à 1/50 voire à 1/100. le rayon de courbure de la fibre moyenne doit être suffisamment grand par rapport aux dimensions transversales de la poutre  $R > 5 \text{ hauteur}_{\text{section}}$  ; en tout cas il ne doit pas y avoir de brusques variations de directions.
- 3- dans le cas de sections variables, la variation de la section doit être lente et progressive

### Principes de bases :

principe de Barré de Saint venant : les contraintes dans une région éloignée des points d'application des forces, dépendent uniquement de la résultante générale  $\mathbf{R}$  et du moment résultant  $\mathbf{M}$  de ce système de forces (i.e. deux systèmes de forces statiquement équivalents produisent même contraintes et mêmes déformations) (NB : les contraintes au voisinages des points d'application des forces nécessitent une étude particulière)

principe de Navier-bernouilli : dans la déformation de la poutre, les sections normales à la fibre neutre restent planes (cet hypothèse est valable dans le cas de moments fléchissant et d'efforts tranchants, elle ne l'est plus s'il y a torsion).

Principe de superposition des états d'équilibre : si on étudie les efforts et contraintes dans une poutre sous l'effet de plusieurs forces et moments, on peut additionner les effets de ces forces et moments considérés séparément pour obtenir leurs effets cumulés.

**Equilibre d'une poutre** : si on coupe la poutre par un plan  $\Sigma$ , chaque morceau A et B ainsi défini est en équilibre sous l'action des forces extérieures qui lui sont appliquées, et des forces intérieures appliquées sur la partie coupée. Traditionnellement en RDM on effectue l'équilibre des forces de gauche sur celles de droite. Si, pour simplifier un calcul, on considère les forces de droites, il ne faut pas oublier de changer leur signes. Les forces intérieures se décomposent en :

- Pour la résultante **R** :
  - effort normal **N**, normal à la section
  - effort tranchant **T**, dans le plan de la section
  
- Pour le moment **M** :
  - moment fléchissant **M<sub>f</sub>**, dans le plan de la section
  - couple de torsion **C**, normal à la section

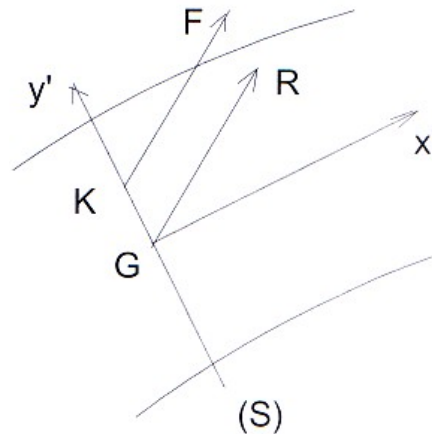
l'ensemble forme le torseur des efforts internes ou torseur des efforts mécaniques de cohésion

plus scientifiquement pour une poutre à plan moyen chargée dans son plan, l'effort normal, tranchant et moment fléchissant sont donnés par les intégrales :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \iint_{\Sigma} \sigma \cdot dS \\ V_y = \iint_{\Sigma} \tau_{xy} \cdot dS \\ M_z = \iint_{\Sigma} -\sigma \cdot y \cdot dS \end{array} \right.$$

il est possible de réduire le système de forces extérieures en une force **F** unique, équipollente à la résultante générale **R**, et perçant la section par le point K. l'ensemble de ces points K forment la courbe des pressions.

Le moment fléchissant est alors égal au moment de cette force **F** par rapport au centre de gravité G de la section considérées :



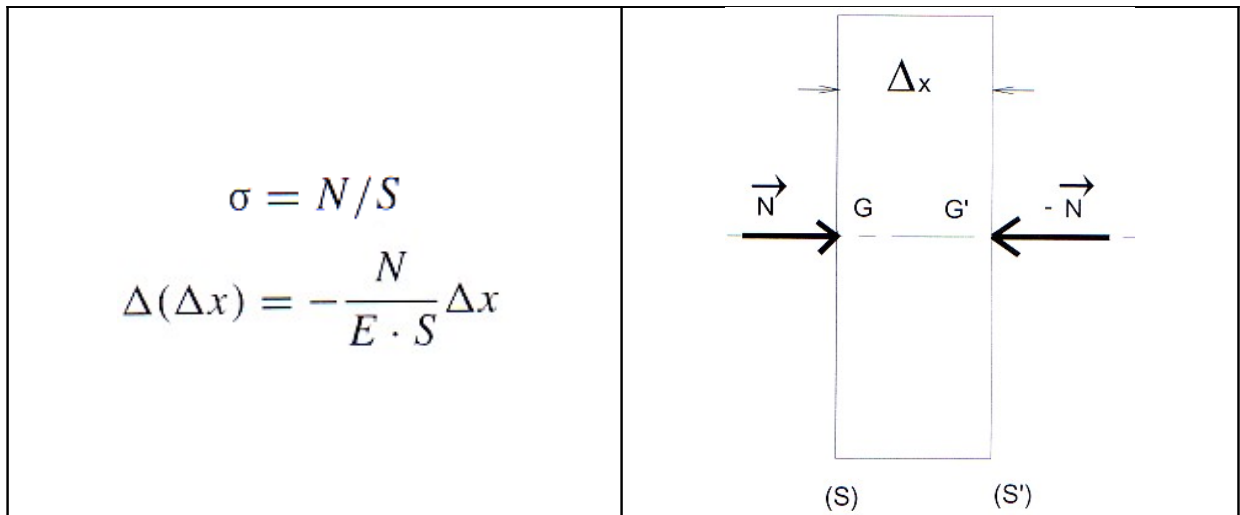
de plus comme le moment de l'effort tranchant est nul, le moment **M<sub>f</sub>** résulte finalement du moment de **N**, composante de **F**, par rapport au point G.

la dérivée du moment fléchissant par rapport à la ligne moyenne s donne l'effort tranchant :  $T = \frac{dM_f}{ds}$

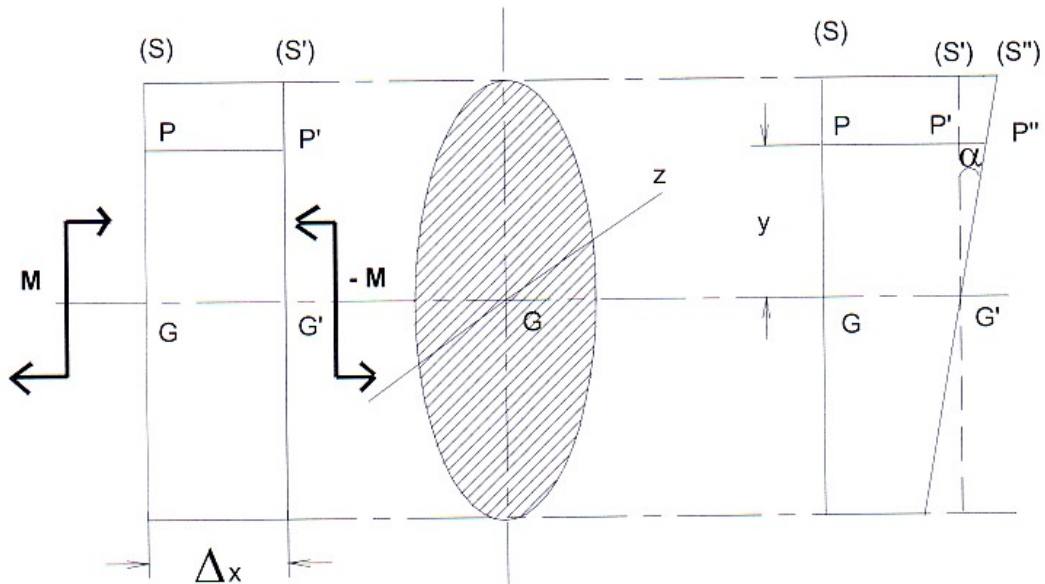
sens des effort : traditionnellement en RDM une compression est positive, une traction est négative.

**Traction simple** : effort normal seul

- un effort normal seul est obligatoirement situé au centre de gravité de la section, sinon on aurait un moment parasite
- les contraintes normales se répartissent uniformément sur toute la section
- les sections se déplacent parallèlement entre elles durant la déformation, sans rotation de l'une par rapport à l'autre



**Flexion pure** : moment fléchissant seul ; cela suppose que celui-ci soit constant, sinon on aurait un effort tranchant égal à la dérivée de ce moment par rapport à l'arc de la fibre moyenne.



les sections sont considérées comme restant planes après déformation, donc  $S'$  subit une rotation relative par rapport à  $S$  et vient en  $S''$ . le centre de gravité ne varie pas et l'axe  $Gz$  est l'axe de rotation de la section  $S'$  (aussi appelé axe neutre car la contrainte  $y$  est nulle)

on démontre que : les contraintes étant proportionnelles à la distance par rapport à la fibre neutre

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

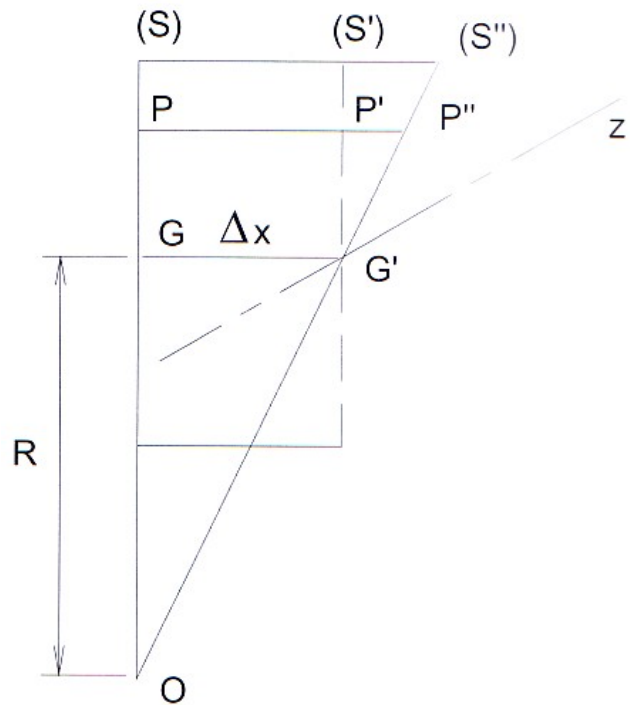
- $M$  étant le moment fléchissant, exprimé en  $\text{mN}$  ;
- $I$  étant le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe  $Gz$ , exprimé en  $\text{m}^4$
- $y$  étant exprimé en  $\text{m}$ ,  $\sigma$  est exprimé en  $\text{Nm}^{-2}$ .

La section  $S'$  parallèle à la section  $S$  avant déformation vient couper celle-ci en  $O$  après déformation

On démontre que :

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$$

dans le cas de la flexion pure,  $M$  étant constant, et si  $I$  l'est aussi (section constante), la déformée est un cercle, voilà pourquoi la flexion pure est aussi nommée flexion circulaire



**Flexion simple :** le moment fléchissant est accompagné d'un effort tranchant. Les résultats sont très semblables à ceux de la flexion pure, mais le rayon de courbure de la fibre moyenne déformée n'est plus constant. A la contrainte normale  $\sigma = My/I$  s'ajoute des contraintes tangentielles.

**Déformée et calcul des flèches :** sous l'effet des forces qui lui sont appliquées une poutre se déforme. On appelle flèche à l'abscisse  $x$  le déplacement vertical du centre de gravité de la section relative à cette abscisse. Le nouveau lieu des centres de gravité prend le nom de fibre moyenne déformée, ou déformée. L'équation de la déformée  $y=f(x)$  se calcule à partir de l'équation différentielle :

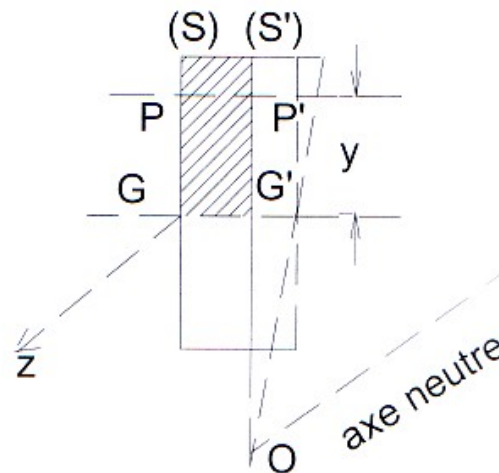
$$y'' = \frac{M(x)}{EI}$$

- $y''$  est la dérivée seconde de  $y$  ;
- $M(x)$  est le moment fléchissant exprimé en fonction de l'abscisse  $x$  ;
- $E$  est le module d'élasticité du matériau constitutif ;
- $I$  est le moment d'inertie de la section considérée par rapport à l'axe passant par le centre de gravité, et normal au plan moyen de la poutre

Dans la plupart des cas courants la flèche due à l'effort tranchant est négligée (donc  $y'' = 1/R = M/EI$ ) et cette approximation est souvent suffisante dans la pratique ; dans le cas des poutres consoles cela peut induire des erreurs supérieures à 12%.



**Flexion composée** : on alors un moment fléchissant **M**, un effort normal **N** et un effort tranchant **T**. son étude résulte de la superposition des résultats de la compression simple et de la flexion simple.



on a donc :

- un déplacement relatif de la section **S'** voisine de **S** due à l'effort normal **N**
- une rotation autour de l'axe **Gz** due au moment fléchissant **Mf**
- la contrainte normale à une distance **y** de la fibre moyenne est :

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{My}{I}$$

- l'axe neutre est défini comme le lieu des contraintes nulles, donc :

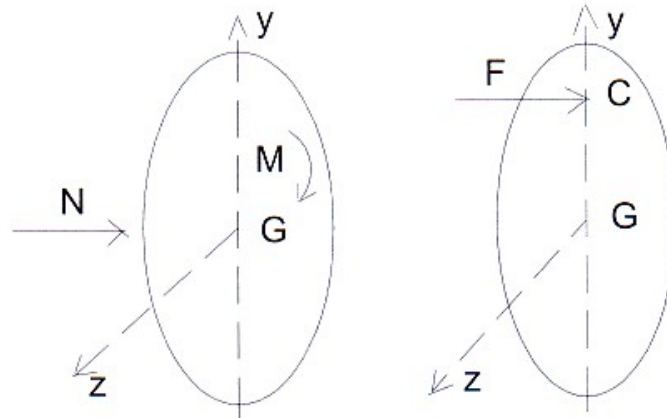
$$\frac{N}{S} + \frac{My}{I} = 0$$

d'où :

$$y = -\frac{N}{S} \frac{I}{M}$$

cet axe neutre est parallèle à celui du au seul moment fléchissant, mais il ne passe pas par le centre de gravité.

On peut remplacer le couple (**N,M**) par une force unique **F** appliquée en un point **C** différent du centre de gravité. On doit donc avoir : **F=N** (égalité des résultantes générales des deux systèmes) et **M=NxGC**



Le point C est le point de passage de la force extérieure. Sur la longueur de la poutre, C décrit la courbe des pressions.

**Noyau central :** de nombreux matériaux de construction, comme les briques, la pierre ou le béton non armé, ne peuvent supporter en toute sécurité, que des contraintes normales de compression. On doit donc déterminer dans quelle partie de la section doit se trouver le point de passage C de la force extérieure pour que la section soit entièrement comprimée. Cette partie de la section est appelée noyau central.

On doit déterminer où :

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{My}{I} \geq 0$$

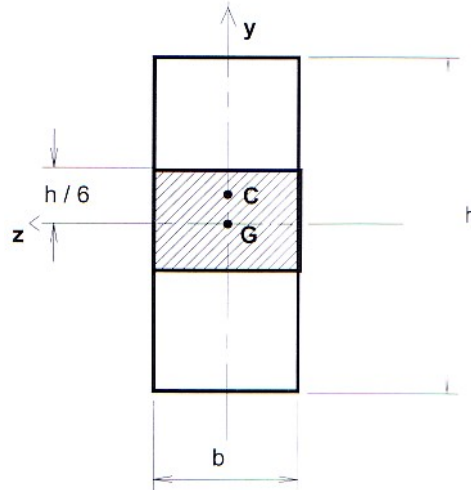
Soit :

$$\frac{M}{N} = GC > -\frac{I}{Sy}, \text{ si } y > 0 \quad \text{et} \quad GC < -\frac{I}{Sy}, \text{ si } y < 0$$

(attention, quand on divise par un nombre négatif, on inverse le sens de l'inégalité).

Dans le cas d'une section rectangulaire de largeur b et de hauteur h on doit avoir (règle du tiers central) :

$$-h/6 < GC < h/6$$

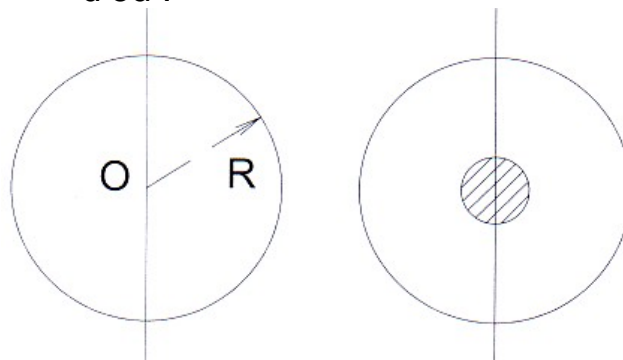


dans le cas d'une section circulaire on a un noyau central situé dans le quart central : on a

$$\overline{OC} > -\frac{I}{S_y} \text{ si } y > 0 \text{ et } \overline{OC} < -\frac{I}{S_y} \text{ si } y < 0$$

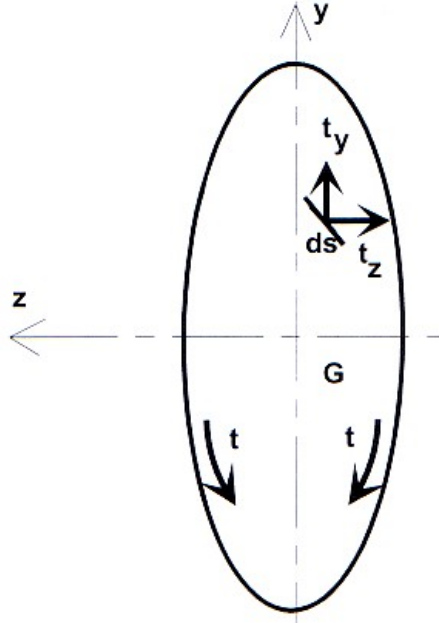
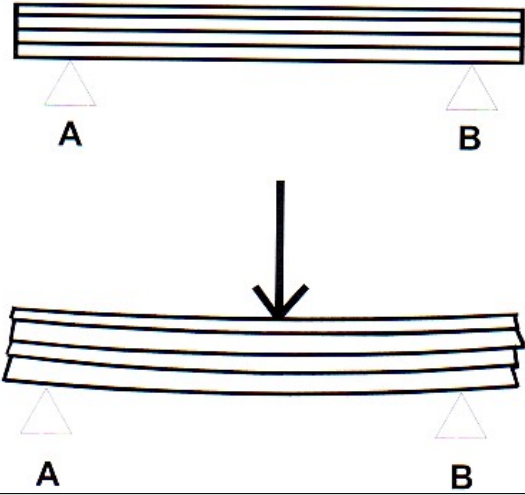
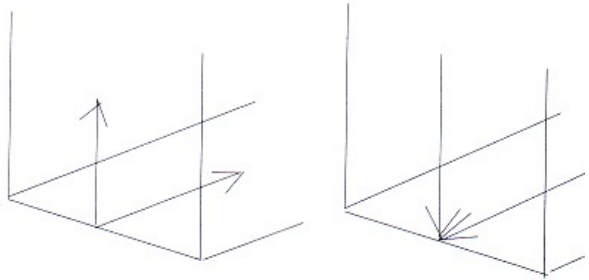
$$\text{avec } I = \frac{\pi R^4}{4}, S = \pi R^2 \text{ et } y = \pm R$$

$$\text{d'où : } -R/4 < \overline{OC} < R/4$$



**Cisaillement dû à l'effort tranchant :** l'effort tranchant dans une poutre a pour effet de faire glisser la partie de la poutre par rapport à la partie droite le long de cette section ; on a donc des efforts tangentiels, ou de cisaillement (l'effort tranchant ne produit que des efforts tangentiels, les efforts normaux étant dus aux moment fléchissant).

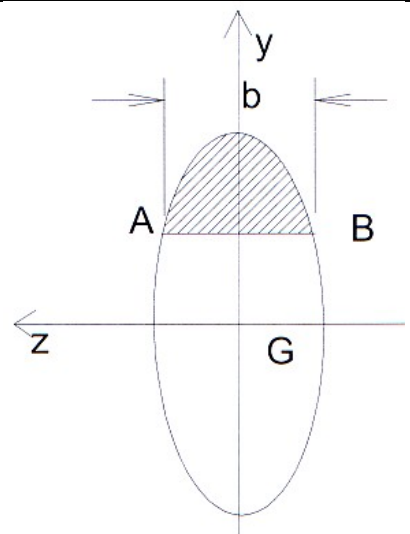
Dans le cas des poutres à plan moyen l'effort tranchant est dirigé selon l'axe Gy ; ses composantes vérifient :	D'autre part les composantes en y et en z de cet effort sont liées entre elles et il en résulte que la contrainte de cisaillement au voisinage du contour est parallèle à ce contour :
---	--

$\sum t_y \cdot ds = T$ $\sum t_z \cdot ds = 0$	
<p>D'autre part la flexion simple engendre aussi des contraintes de cisaillement dans les plans longitudinaux de la poutre :</p>	
<p>Cela correspond au théorème de Cauchy : les contraintes de cisaillement agissant sur deux plans perpendiculaires sont telles que leurs composantes perpendiculaires à la droite d'intersection des deux plans sont égales et dirigées toutes deux soit vers la droite, soit en sens inverse</p>	

Calcul de la contrainte de cisaillement : on considère pour simplifier que la composante en z est négligeable et que la composante en y est constante sur toute parallèle AB à l'axe Gz ; dès lors :

$$t_y = \frac{T \cdot m}{I \cdot b}$$

- $T$  est l'effort tranchant,
- $m$  est le moment statique de l'aire hachurée
- $I$  est le moment d'inertie de la section **totale** par rapport à  $Gz$ ,
- $b$  est la largeur de la section suivant  $AB$ .



La contrainte de cisaillement est nulle pour les points les plus éloignés de l'axe  $Gz$ , et passe par un maximum pour l'ordonnée  $y$  correspondant au maximum de  $m/b$ ; ce maximum est généralement atteint pour  $y=0$  mais ce n'est pas toujours vrai. Le plus souvent cette contrainte de cisaillement est supérieure à celle qui résulterait de l'hypothèse de répartition uniforme des contraintes sur la section.

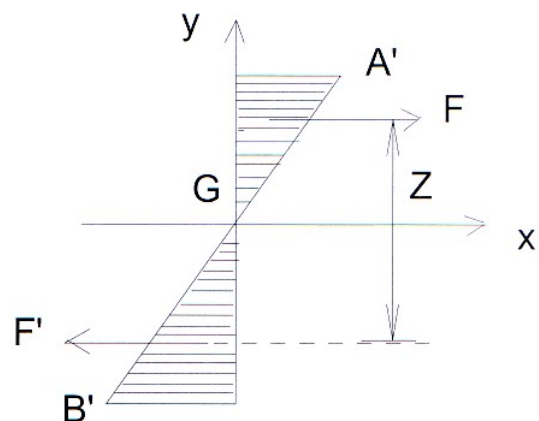
Autre méthode pour calculer la contrainte de cisaillement au centre de gravité :

Les contraintes de compressions ont pour résultantes la force  $F$  passant par le centre de gravité de  $GAA'$

De même les contraintes de traction ont pour résultante la force  $F'$  passant par le centre de gravité du triangle  $GBB'$

Si on ne considère que  $M_f$ , moment fléchissant, à l'exclusion de tout autre effort normal, alors on a  $F = -F'$  et  $M_f = FZ$

Dans ce cas la contrainte de cisaillement au niveau du centre de gravité devient simplement :

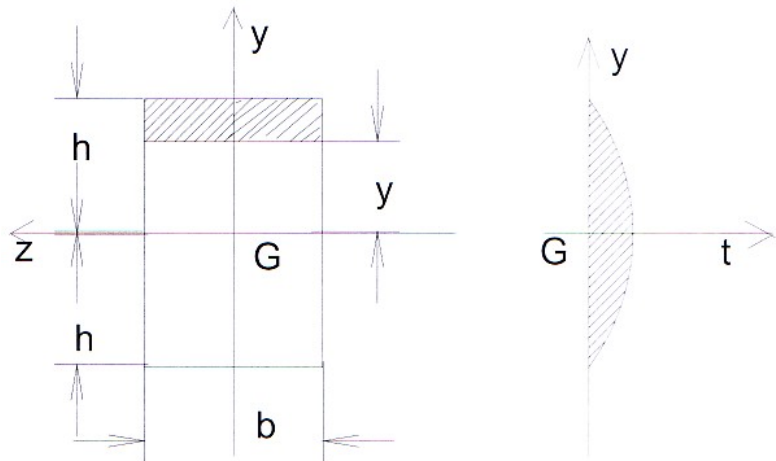


$$t_y = \frac{T}{bZ}$$

Section rectangulaire de hauteur 2h, de largeur b et de surface S=2bh ; la répartition de la contrainte est parabolique, maximum en y=0

$$t_y = \frac{3T}{2S} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)$$

contrainte supérieure à la contrainte moyenne 50%



Section circulaire de rayon R: la répartition des contraintes est parabolique, le maximum obtenu pour y=0

$$t_y = \frac{4T}{3S} \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right)$$

Cette contrainte est égale aux 4/3 de la contrainte moyenne

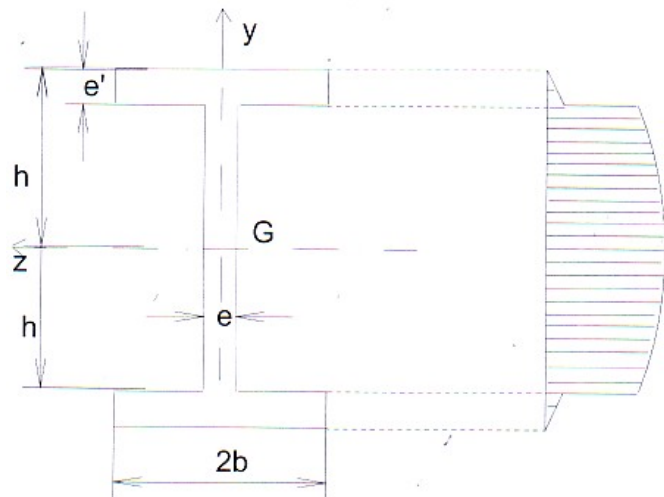
Section en I symétrique : s est la section de l'âme et s' la section de la membrure et λ le rapport s/s' ; si e et e' sont petits devant h et b (termes de degrés supérieur ou égal à deux négligés) on a :

$$t = \frac{T}{s} \frac{1 + \lambda/4}{1 + \lambda/6} = k \frac{T}{s}$$

On peut dire avec une approximation d'autant meilleure que λ est petit :

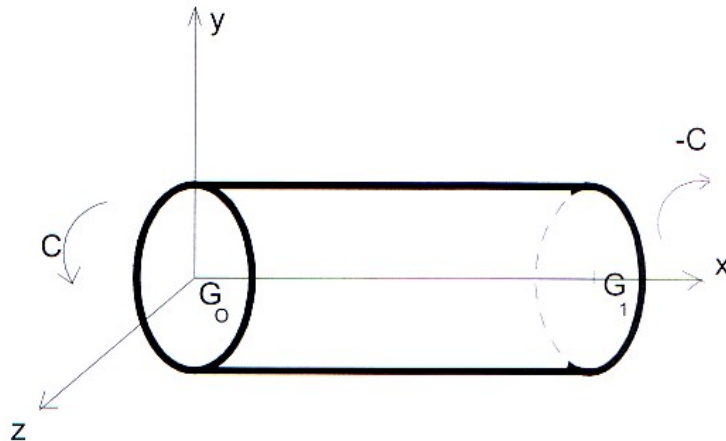
$$t \approx \frac{T}{s}$$

de fait on effectue souvent



le calcul comme si l'âme seule reprenait l'effort tranchant.

**Torsion :** la théorie élémentaire ne donne des résultats exacts que sur des sections circulaires. Pour les autres section la théorie correcte est très compliquée ; de plus les sections ne restent pas planes. Le moment de torsion tend à faire tourner chaque section dans son propre plan, créant des contraintes de cisaillement.



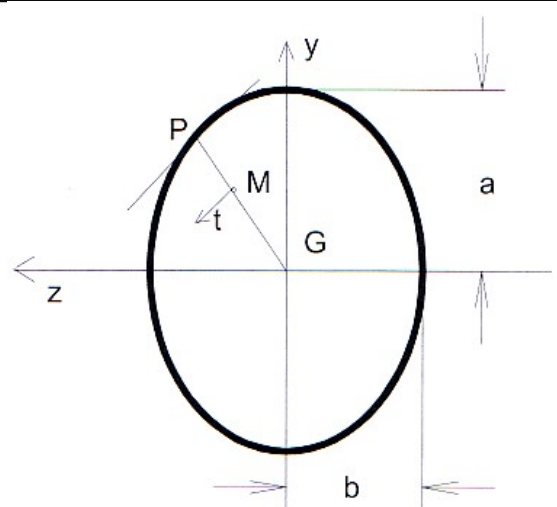
Sections elliptiques :

C étant le moment de torsion, la contrainte en un point M de coordonnées y et z est :

$$t_z = -\frac{2Cz}{\pi ab^3} \quad t_y = \frac{2Cy}{\pi a^3 b}$$

Le long de GP la contrainte de cisaillement est produite à l'extrémité du petit axe et a pour valeur :

$$t_m = \frac{-2C}{\pi ab^2}$$



Sections circulaires : en remarquant qu'il s'agit d'une section elliptique particulière :

$$t_z = \frac{-2Cz}{\pi R^4} \quad t_y = \frac{2Cy}{\pi R^4}$$

Section rectangulaire : résultats très complexes ; en cas de rectangle très étroit, de hauteur b et d'épaisseur e très petite, la contrainte maximale est :

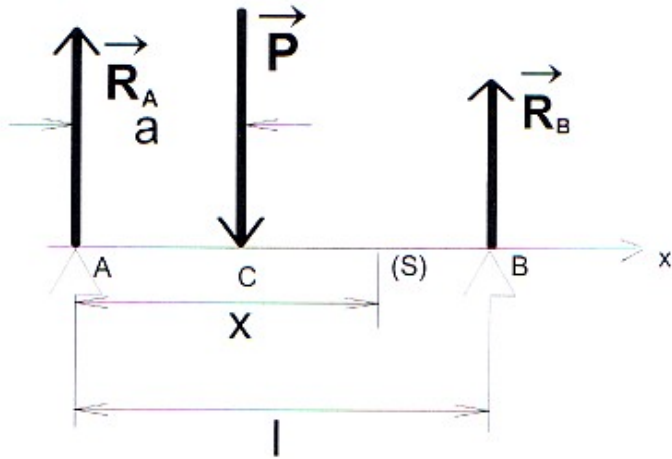
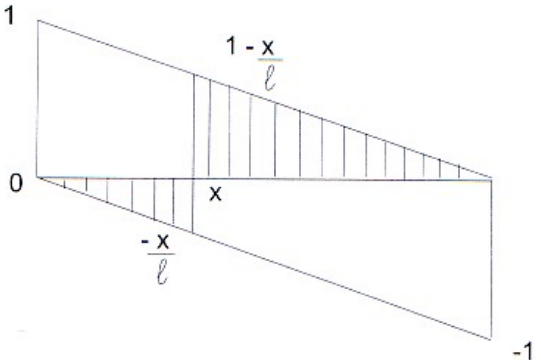
$$t = \frac{C}{\frac{1}{3}be^2} = \frac{3C}{be^2}$$

nota : en général on s'arrange pour ne pas avoir de torsion dans les bâtiments

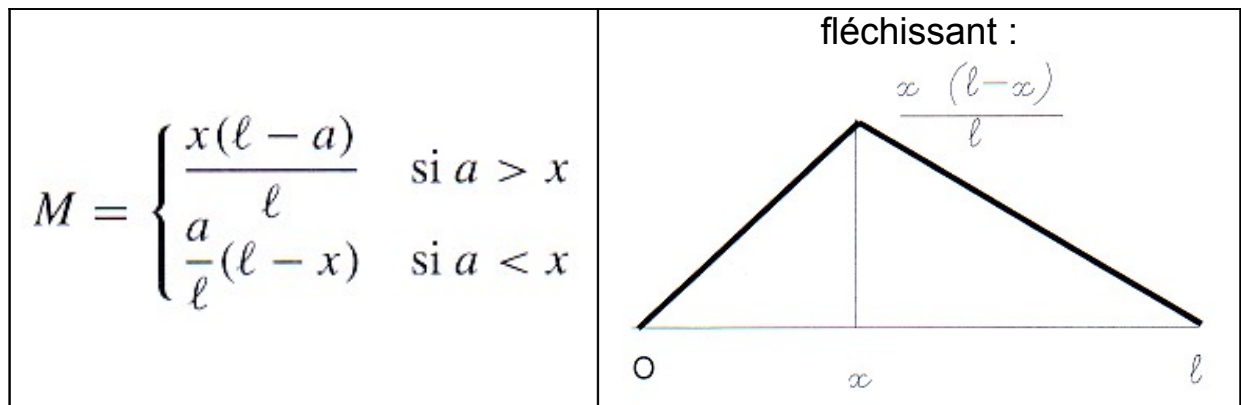
**Etude des poutres droites isostatiques par les lignes d'influences :**

pour étudier l'effet d'une charge ponctuelle, on considère une charge unité pouvant se déplacer sur la poutre ; celle-ci produit un certain nombre d'effets élastiques (moments fléchissant, effort tranchant, etc.). on appelle fonction d'influence d'un effet élastique la fonction  $F=F(a)$  représentant la variation de l'effet élastique en fonction de l'abscisse de la charge unité, et ligne d'influence la courbe représentative de  $F(a)$  pour l'effet élastique considéré.

On étudie donc un effet élastique d'une force unité dans la section d'abscisse  $x$ , constante, lorsque la charge unité considérée varie avec son abscisse  $a$ . e.g. :

	<p>Lignes d'influence de l'effort tranchant :</p> 
<p>Effort tranchant :</p> $T = \begin{cases} 1 - \frac{a}{l} & \text{si } a > x \\ -\frac{a}{l} & \text{si } a < x \end{cases}$	<p>Moment Fléchissant :</p>
<p>Moment Fléchissant :</p>	<p>Ligne d'influence du moment</p>



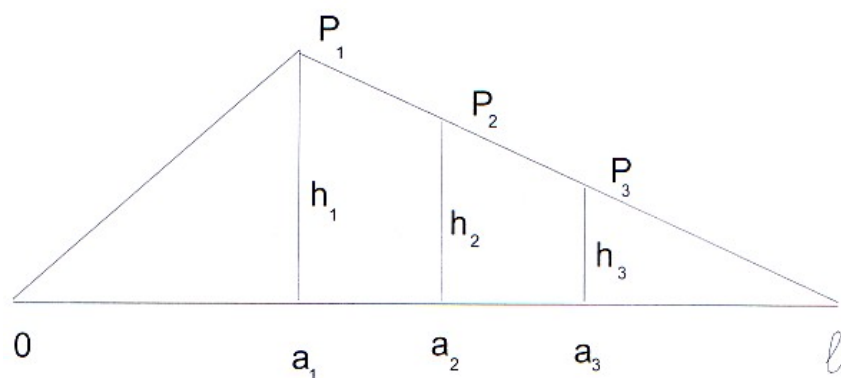


Si on voulait connaître l'effet élastique de la charge P, il suffirait de multiplier le résultat obtenu pour la charge unité par P.

Pour des charges uniformément réparties (que l'on peut considérer comme un ensemble de charges ponctuelles très rapprochées), le moment et l'effort tranchant en fonction de x s'obtiennent en multipliant les surfaces délimitées par les lignes d'influences par la charge P.

Superposition de charges concentrées : les lignes d'influences sont utiles pour traiter ces cas. On utilise alors le principe de superposition des états d'équilibre pour tracer les courbes de moments, qui sont dans ce cas précis des droites :

En utilisant la ligne d'influence du moment fléchissant à l'abscisse a1 on a :



$M_{fa1} = P_1 h_1 + P_2 h_2 + \dots$   $h_i$  étant le moment fléchissant, en  $a_i$ , de la force unité placée en  $a_i$  ; de plus :

Nous savons que :

$$h_1 = a_1 \frac{\ell - a_1}{\ell}$$

Or, dans les triangles semblables, l'application du théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\ell - a_2}{\ell - a_1}, \text{ d'où } h_2 = h_1 \frac{\ell - a_2}{\ell - a_1} \text{ et, de même, } h_3 = h_1 \frac{\ell - a_3}{\ell - a_1}$$

Finalement, le moment fléchissant est égal à :

$$M_1 = \frac{a_1}{\ell} \left( P_1(\ell - a_1) + P_2(\ell - a_2) + P_3(\ell - a_3) \right)$$

on fait de même pour les sections d'abscisses  $a_2$ ,  $a_3$ , etc. et on trace la courbe des moments

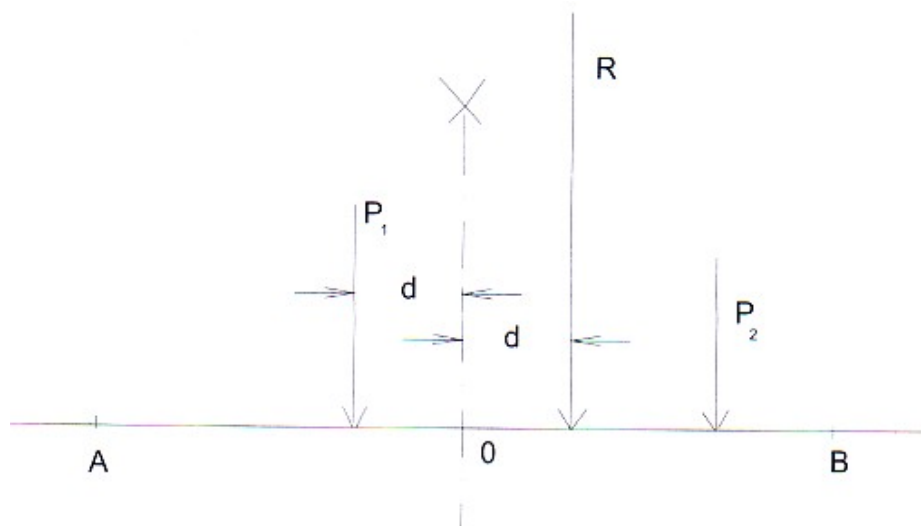
le calcul des lignes d'influences est rapide et donne la possibilité de mesurer graphiquement les différentes valeurs de  $h$  (à une échelle convenable bien entendu).

Effet d'un convoi – Théorème de Barré : un convoi est un ensemble de charges concentrées pouvant se déplacer dans leur ensemble, les distances entre les lignes d'action des différentes charges restant constantes au cours des déplacements (voiture, train, pont roulant, etc.)

Pour déterminer l'effort tranchant et le moment maximum dans une section de poutre on utilise les lignes d'influences correspondantes dans cette section et on déplace le convoi dessiné sur papier transparent, jusqu'à obtention du maximum de l'effet considéré. Pour une position donnée du convoi **T** et **M** s'obtiennent par le calcul ci-dessus. On considère souvent un certain nombre de sections dans lesquelles on détermine les valeurs maximales de **T** et de **M** et on trace les courbes enveloppes.

Pour avoir le maximum dans une section un essieu doit se trouver sur la section considérée.

Théorème de Barré : le moment fléchissant est maximum au droit d'un essieu lorsque cet essieu et la résultante générale du convoi se trouvent dans des sections symétriques par rapport au milieu de la poutre. (nota : la résultante générale doit se trouver effectivement sur la poutre).



Le plus souvent, mais ce n'est pas toujours vrai, le maximum absolu se trouve au droit d'un des essieux les plus voisins de la résultante générale **R**

Lignes enveloppes : la ligne enveloppe de l'effet considéré est la ligne à l'intérieur de laquelle peuvent s'inscrire les lignes représentatives correspondant à tous les cas de charges possibles.

**Poutres hyperstatiques** : poutres dont les liaisons sont telles qu'il n'est pas possible de calculer les réactions d'appui avec les seules équations de la statique. Le nombre de réactions inconnues définit le degré d'hyperstaticité du système. Exemples de systèmes hyperstatiques courants :

- poutre encastree aux deux extremités
- poutre encastree à une extremité et sur un appui simple dans l'autre
- poutres continues

Formules valables pour toutes les poutres hyperstatiques : soit une poutre 01 de longueur  $l$  soumise seulement aux réactions d'extrémités  $M_0, M_1, R_0$  et  $R_1$  (cette situation est possible dans le cas de poutres à trois travées dont seules les travées d'extrémités sont chargées )



Les équations de la statique permettent d'écrire que la résultante des forces est nulle :

$$R_0 + R_1 = 0$$

Le moment résultant à l'extrémité 1 (par exemple) est nul, soit :

$$M_0 + R_0 \ell - M_1 = 0$$

$$\text{D'où l'on tire : } R_0 = \frac{M_1 - M_0}{\ell}$$

Le moment fléchissant à l'abscisse  $x$  est alors

$$M(x) = M_0 + R_0 x = M_0 + x \frac{M_1 - M_0}{\ell} = M_0 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + M_1 \frac{x}{\ell}$$

On trouve bien  $M = M_0$  pour  $x = 0$  et  $M = M_1$  pour  $x = \ell$ .

supposons maintenant que la poutre 01 reçoive un système de charge quelconque ; nous considérons la poutre isostatique et raisonnons par superposition des états d'équilibre. Les charges produisent un moment fléchissant  $m(x)$  et un effort tranchant  $T(x)$  ; on a alors :

$$M(x) = m(x) + M_0 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + M_1 \frac{x}{\ell}$$

$$T(x) = t(x) + \frac{M_1 - M_0}{\ell}$$

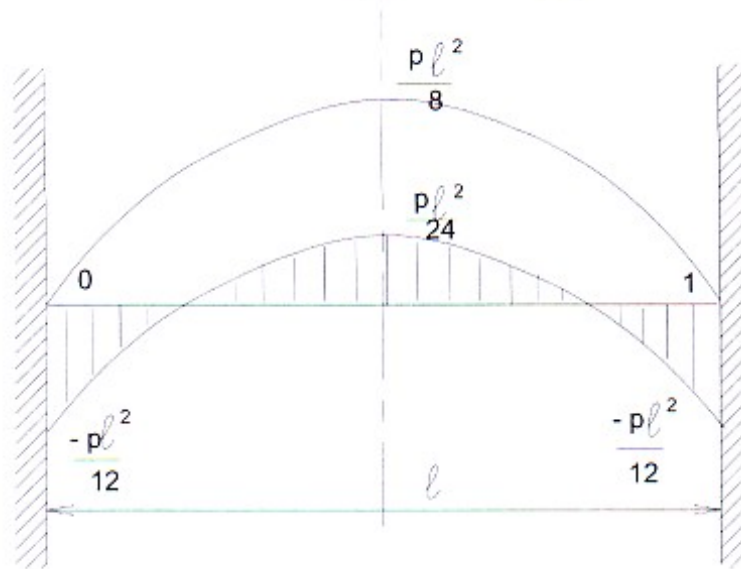
naturellement  $m(0)=m(\ell)=0$  ;

Encastrement : on les considère comme parfaits, c'est à dire que la poutre reste horizontale à l'encastrement malgré les efforts appliqués, i.e.  $y'(x)=0$  ; ce qui permet d'intégrer l'équation différentielle fondamentale de la déformation des poutres

Continuité sur appui : il y a continuité de la fibre moyenne sur l'appui, i.e.  $y'$ -gauche= $y'$ -droite

Poutre encastree aux deux extremités avec charge uniformément répartie de densité  $p$  :

$$M(x) = p \frac{x(\ell - x)}{2} - \frac{p\ell^2}{12}$$



le diagramme du haut est donné pour comparaison ; il s'agit d'une poutre libre à ses deux extrémités

Poutre encastree à l'origine et sur appui simple sur l'autre appui :

$$M(x) = p \frac{x(\ell - x)}{2} - \frac{p\ell^2}{8} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$

